Είδαμε για διακριτό τ.δ. 23/10/2018

Συνάρτηση Πιθανότητας (από κοινού)

Α.Σ.Κ.

Περιθώριες

Δεσμευμένες

• Αντίστοιχα σήμερα για συνεχείς

• ΟΡΙΣΜΟΣ:

Έστω $n \geq 2$ συνεχείς τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ ορισμένες στον ίδιο δειγματικό χώρο S. Έστω ακόμα ότι υπάρχει μία μη αρνητική συνάρτηση n-μεταβλητών $f: \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ τ.ω $\forall\, \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ το οποίο μπορεί να γραφεί μέσω n-διάστατων ορθογωνίων με χρήση πεπερασμένου ή άπειρου αριθμήσιμο πλήθος πράξεων να ισχύει:

$$P((X_1, \dots, X_n) \in \Gamma) = \underbrace{\int \cdots \int_\Gamma}_{n\text{-όροι}} f(x_1 \dots x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

Η παραπάνω συνάρτηση f σε αυτή την περίπτωση λέγεται από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών $X_1, \dots, X_n$

$$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = \int_{A_1}\int_{A_2} \cdots \int_{A_n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_n\, dx_{n-1} \cdots dx_1 =$$

διότι τώρα $\Gamma = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

$$= \int_{A_n}\int_{A_{n-1}} \cdots \int_{A_1} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

• Ιδιότητα:

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = 1$

π.ο των $X_1 \dots X_n$

2) f μη αρνητική

· ΟΡΙΣΜΟΣ

Η από κοινού α.σ.κ των συνεχών τ.μ. $X_1, \dots, X_n$ δίνεται από τη σχέση:

$$F_X(x) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_X(y_1, \dots y_n)\,dy_n \cdots dy_1$$

· ΠΕΡΙΘΩΡΙΑ

Ολοκληρώνοντας την από κοινού σ.π.π των $(X_1, \dots X_n)$ ως προς k από τις μεταβλητές $X_1, \dots, X_n$ προκύπτει η περιθώρια κατανομή των υπολοίπων $n-k$ το πλήθος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

(X, Y, Z, ω) $\quad f(x, y, z, \omega)$

$$f(x, y) = \int_{\pi.o\,\omega}\int_{\pi.o\,z} f(x, y, z, \omega)\,dz\,d\omega$$

$$f(x, y, z) = \int_{\pi.o.\,\omega} f(x, y, z, \omega)\,d\omega$$

$$f(\omega) = \int_{\pi.o.z}\int_{\pi.o.y}\int_{\pi.o.x} f(x, y, z, \omega)\,dx\,dy\,dz$$

$$f(x, \omega) = \int_{\pi.o.z}\int_{\pi.o\,y} f(x, y, z, \omega)\,dy\,dz$$

• ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ:

Έστω (X,Y) συνεχής τ.μ. (δισδιάστατη) με από κοινού σ.π.π $f_{XY}(x,y)$. Για κάθε x έχουμε τη δεσμευμένη τ.μ. $Y|X=x$ της οποίας η δεσμευμένη σ.π.π ορίζεται από τη σχέση

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \qquad f_X(x) \neq 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η συνάρτηση δύο μεταβλητών X,Y που δίνεται από τη σχέση

$f_{XY}(x,y) = k(x+y) \qquad 0<x<1 \quad , \quad 0<y<1$

i) $k=?$ ώστε f από κοινού σ.π.π

ii) $P(0<X<1/2 \, , \, 0<Y<1/4)$

iii) Περιθώρια της X

iv) Περιθώρια της Y

v) Δεσμευμένη $Y|X=x$

vi) Α.Σ.Κ.

ΛΥΣΗ

i) $f(x,y) \geq 0 \Rightarrow k(x+y) \geq 0 \quad \forall \quad 0<x<1 \, , \, 0<y<1$

$\Rightarrow \underline{k \geq 0}$

$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=1} k(x+y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \int_0^1 \left[k\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)\right]_0^1 dy = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 k\left(\frac{1}{2}+y\right)dy = 1 \Rightarrow k\left[\frac{1}{2}y+\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 1 \Rightarrow k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow \underline{k=1}$$

Άρα η σ.π.π γίνεται: $f_{XY}(x,y) = x+y \; , \; y\in(0,1) \, , \, x\in(0,1)$

ii) $P(0<X<\frac{1}{2}, 0<Y<\frac{1}{4}) = \int_{y=0}^{1/4}\int_{x=0}^{1/2} x+y \, dx dy =$

$= \int_{y=0}^{1/4} \left[\frac{1}{2}x^2 + xy\right]_0^{1/2} dy = \int_0^{1/4} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2} y \, dy = \int_0^{1/4} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+y\right) dy =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}y^2\right]_0^{1/4} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right] =$

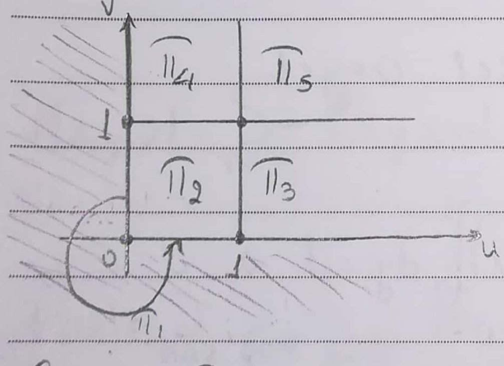
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{32} = \frac{3}{64}$

iii) $f_X(x) = \int_{\text{ΠΟ } Y} f(x,y) dy = \int_{y=0}^{1} (x+y) dy = x + \frac{1}{2} \quad 0<x<1$

iv) $f_Y(y) = \int_{x=0}^{1} (x+y) dx = y + \frac{1}{2} \quad 0<y<1$

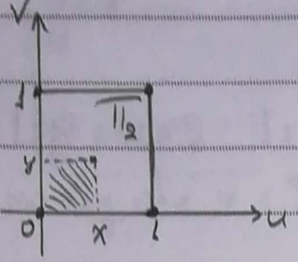
v) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}} \quad , 0<y<1$

vi) $F_{XY}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(u,v) du dv$



<u>Για το Π_1</u>

$F_{XY}(x,y) = \int 0 = 0 \ , \ x<0$ ή $y<0$



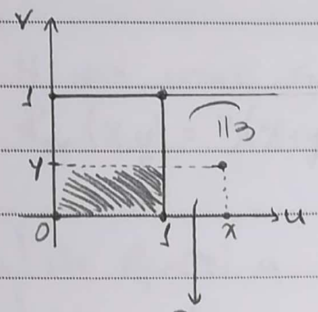
Για το Π_2:

$$F_{XY}(x,y) = \int_{v=0}^{y}\int_{u=0}^{x} u+v \, du dv =$$

$$= \int_{v=0}^{y} \left[\frac{1}{2}u^2 + uv\right]_0^x dv = \int_{v=0}^{y} \frac{1}{2}x^2 + xv \, dv = \left[\frac{1}{2}x^2 v + \frac{1}{2}xv^2\right]_0^y =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{2}xy^2 = \frac{1}{2}\left[x^2 y + xy^2\right] \qquad 0<y<1 \, , \, 0<x<1$$

Για το Π_3:



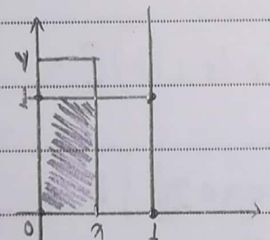
Δεν το σκιαγραφώ γιατί στο κομμάτι αυτό η σ.π.π είναι 0.

$$F_{XY}(x,y) = \int_{v=0}^{y}\int_{u=0}^{1} u+v \, du dv =$$

$$= \int_{v=0}^{y} \left[\frac{1}{2}u^2 + uv\right]_0^1 dv = \int_{v=0}^{y} \frac{1}{2} + v \, dv =$$

$$= \left[\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}v^2\right]_0^y = \frac{1}{2}\left[y + y^2\right], \quad x \geq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

Για το Π_4:

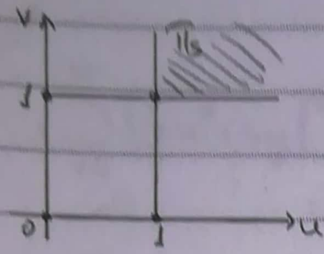


$$F_{XY}(x,y) = \int_{u=0}^{x}\int_{v=0}^{1} u+v \, dv du = \int_{u=0}^{x} \left[uv + \frac{1}{2}v^2\right]_0^1 du =$$

$$= \int_{u=0}^{x} u + \frac{1}{2} du = \left[\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u\right]_0^x = \frac{1}{2}\left(x^2 + x\right),$$

$0<x<1 \quad y \geq 1$

Για το Π_5



$$F_{XY}(x,y) = \int_0^1\int_0^1 (u+v)\,du\,dv = 1 \quad , x \geq 1 , y \geq 1$$

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0 & x<0 \text{ ή } y<0 \\ \frac{1}{2}(yx^2+xy^2) & 0<x<1 \ , \ 0<y<1 \\ \frac{1}{2}(y^2+y) & x \geq 1 \ , \ 0 \leq y < 1 \\ \frac{1}{2}(x^2+x) & 0 \leq x < 1 \ , \ y \geq 1 \\ 1 & x \geq 1 \ , \ y \geq 1 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.1 ΣΕΛ 78

Έστω δύο τ.μ. X και Y με από κοινού σ.π.π

$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2}xy \qquad I_{(0,x)}(y) \qquad I_{(0,2)}(x)$

Να βρεθούν οι κατανομές των X και Y.

ΛΥΣΗ

$$I_{(0,x)}(y) = \begin{cases} 1 & αν \ 0<y<x \\ 0 & αλλού \end{cases} \qquad I_{(0,2)}(x) = \begin{cases} 1 & 0<x<2 \\ 0 & αλλού \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_0^x \frac{1}{2}xy\,dy = \left[\frac{1}{4}xy^2\right]_0^x = \frac{1}{4}x^3 \qquad 0<x<2$$

Για τα όρια του ολοκληρώματος του $f_Y(y)$

$$\begin{cases} y < x \\ 0 < x < 2 \end{cases}$$
$\max\{y,0\} < x < 2$

Άρα:

$$f_Y(y) = \int_{x=y}^{2} \frac{1}{2} x y \, dx = \left[\frac{1}{4} x^2 y\right]_y^2 = \frac{1}{4}\cdot 4y - \frac{1}{4} y^2 \cdot y = y - \frac{1}{4} y^3$$

$0 < y < 2$

ΑΣΚΗΣΗ 2.2 Σελ 78

Η από κοινού σ.π.π των τ.μ. Χ και Υ είναι
$f_{XY}(x,y) = 3(x+y) \quad I_{(0,1)}(x+y) \quad I_{(0,1)}(x) \quad I_{(0,1)}(y)$

i) Να βρεθεί η κατανομή περιθωρίου της Χ
ii) Να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(X+Y < 0{,}5)$

ΛΥΣΗ

i) $f_X(x) = \int_{R_Y} f(x,y)\, dy = \int_0^{1-x} 3(x+y)\, dy = \left[3\left(xy + \frac{1}{2} y^2\right)\right]_0^{1-x} =$

$= 3\left(x(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2\right) = 3\left[x - x^2 + \frac{1}{2}(1 - 2x + x^2)\right] = 3\left[\cancel{x} - x^2 + \frac{1}{2} - \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2\right] =$

$= 3\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2\right] = \frac{3}{2}(1 - x^2) \qquad 0 < x < 1$

Για το χώρο του ολοκληρώματος

$$\begin{cases} 0 < y < 1 \\ -x < y < 1-x \end{cases}$$
$\max\{-x, 0\} < y < \min\{1, 1-x\}$
$\quad\;\; \overset{\shortparallel}{0} \qquad\qquad\quad \overset{\shortparallel}{1-x}$

ii) $P(X+Y<\frac{1}{2}) = \int_0^{1/2}\int_0^{1/2-x} 3(x+y)\,dy\,dx =$

$= 3\int_0^{1/2}\int_0^{1/2-x} x+y\,dy\,dx = 3\int_0^{1/2}\left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1/2-x} dx =$

$= 3\int_0^{1/2}\left[\left(\frac{1}{2}-x\right)x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-x+x^2\right)\right]dx =$

$= 3\int_0^{1/2}\left[\cancel{\frac{1}{2}x}-x^2+\frac{1}{8}-\cancel{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}x^2\right]dx =$

$= 3\int_0^{1/2}\frac{1}{8}-\frac{1}{2}x^2\,dx = \frac{3}{2}\int_0^{1/2}\frac{1}{4}-x^2\,dx = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{1/2} =$

$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{24}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{24}-\frac{1}{24}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{24} =$

$= \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2.3 ΣΕΛ 78</u>

Εστω η τ.μ. $X \sim U(0,1)$ και έστω ότι η τ.μ. $Y|X=x \sim B(n, P=x)$
Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. Y.

<u>ΛΥΣΗ</u>

$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \Rightarrow f_{XY}(x,y) = f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x)$

$\Rightarrow f_{XY}(x,y) = \binom{n}{y}x^y(1-x)^{n-y}$ οπου , $y=0,1,\dots,n$

$f_Y(y) = \int_0^1 \binom{n}{y}x^y(1-x)^{n-y}\,dx = \binom{n}{y}\int_0^1 x^y(1-x)^{n-y}\,dx =$ ← Αυτό δεν υπολογίζεται με μεθόδους Απ. Λογ. Υπολογίζω με χρήση γνωστων κατανομων.

$\overset{(*)}{=} \binom{n}{y}B(y+1,n-y+1)\cdot\int_0^1 \underbrace{\cancel{\frac{x^{y+1-1}(1-x)^{n-y+1-1}}{B(y+1,n-y+1)}}}_{1}\,dx =$

$= \binom{n}{y}B(y+1,n-y+1)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

$f_Y(y) = \binom{n}{y} B(y+1, n-y+1)$ αν δίνεται

$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ τότε $f_Y(y) = \frac{n!}{\cancel{y!(n-y)!}} \cdot \frac{\cancel{\Gamma(y+1)\Gamma(n-y+1)}}{\Gamma(n+2)} =$

όπου $\Gamma(a) = (a-1)!$

$= \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}, \quad y = 0, 1, \ldots, n$

ΑΣΚΗΣΗ 2.23 Σελ 82

Έστω (X,Y) τ. διάνυσμα με σ.π.π

$f(x,y) = cy(x-y), \quad -y < x < y, \quad 0 < y < 3$ και 0 αλλού.

Να βρεθούν (i) η σταθερά c, (ii) οι δεσμευμένες κατανομές $f_{X|Y}$, $f_{Y|X}$.

ΛΥΣΗ

i) $f(x,y) \geq 0$

$cy(x-y) \geq 0$

Άρα $c \leq 0$

$$\iint_{\text{π.ο } X,Y} f(x,y)\,dx\,dy = 1 = \int_0^3\int_{-y}^{y} cy(x-y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow c\int_0^3\int_{-y}^{y} xy - y^2\,dx\,dy = 1$$

$$\Rightarrow c\int_0^3 \left[\frac{1}{2}x^2y - xy^2\right]_{-y}^{y} dy = 1 \Rightarrow c\int_0^3 -2y^3\,dy = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2c\int_0^3 y^3\,dy = 1 \Rightarrow -2c\left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^3 = -2c\left(\frac{1}{4}81\right) = -\frac{81}{2}c = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = -\frac{2}{81}$$

ii) Για τα όρια ολοκλήρωσης

$$\begin{cases} 0 < y < 3 & x \in [-3, 3] \\ x < y \\ -x < y \end{cases}$$

$\max\{0, -x, x\} < y < 3$

Παίρνω περιπτώσεις επειδή δεν ξέρω ποιο είναι το μεγαλύτερο

Άρα $f_X(x) = \begin{cases} \int_{-x}^{3} -\frac{2}{81} y(x-y)dy, & -3 \leq x \leq 0 \\ \int_{x}^{3} -\frac{2}{81} y(x-y)dy & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{81}\left(\frac{5x^3}{3} - 9x + 18\right) & -3 < x < 0 \\ -\frac{1}{81}\left(9x - 18 - \frac{x^3}{3}\right) & 0 < x < 3 \end{cases}$

$f_Y(y) = \int_{-y}^{y} f(x,y)dx = \int_{-y}^{y} -\frac{2}{81}(x-y)y\,dx = \frac{4}{81}y^3 \quad 0 < y < 3$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

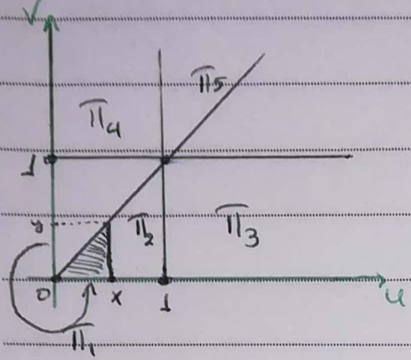
Δίνεται η από κοινού $f(x,y) = 3x \quad 0 \leq y \leq x \leq 1$

i) $f_X(x) = \int_0^x 3x\,dy = 3x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$

ii) $f_Y(y) = \int_y^1 3x\,dx = \frac{3}{2}(1-y^2), \quad 0 \leq y \leq 1$

iii) Α.2.κ.

$F(x,y) = P(X\le x, Y\le y) = \iint f(u,v)\,du\,dv$



$\Pi_1: F(x,y)=0 \quad x<0$ ή $y<0$

$\Pi_2: F(x,y)=\int_0^y\int_v^x 3u\,du\,dv \quad 0<x<1,\ y\le x$

$\Pi_3: F(x,y)=\int_{v=0}^{y}\int_{u=v}^{1} 3u\,du\,dv \quad ,\ x\ge 1,\ y\le x$

$\Pi_4: F(x,y)=\int_{u=0}^{x}\int_{v=0}^{u} 3u\,dv\,du = \int_{v=0}^{x}\int_{u=v}^{x} 3u\,du\,dv \quad 0\le x\le 1,\ x\le y$

$\Pi_5: F(x,y)=1$

ΑΣΚΗΣΗ (Η|ω)

Η δισ. μονάς X,Y έχει $f(x,y)=8(x+y) \quad 0<x<\frac{1}{2}$
$0<y<\frac{1}{2}$

Να βρεθούν:
i) η περιθώρια της X f_X
ii) $f_{X|Y}$
iii) F_{XY} (Α.2.κ)